EXERCICE N°1 : 30' 5 points

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\sqrt{2}(1+i)z-1+i=0$

b) Vérifier que les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $z_1=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{5i\frac{\pi}{8}}$.

2°) Soit θ un réel de $]0;\pi[$.

a) Vérifier que $e^{2i\theta}-2i\sin\theta\, e^{i\theta}=1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2-2e^{i\theta}z+2i\sin\theta\, e^{i\theta}=0$.

3°) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$, on considère les points $A(e^{i\theta}+1)$, $B(e^{i\theta}-1)$ et $C(1-e^{-i\theta})$.

a) Déterminer l'ensemble des points C lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

b) Montrer que *A, B* et *C* sont alignés.

c) Montrer que le triangle *OAB* est rectangle en *O*.

d) Déterminer θ pour que le triangle *OAB* soit isocèle.

4°) On prend $\theta=\frac{\pi}{5}$. Soit $M(z)$ un point du plan et soit $M'(z')$ tel que $z'=\frac{z-e^{i\theta}-1}{z-e^{i\theta}+1}$ $(z\neq e^{i\theta}-1)$.

a) Déterminer l'ensemble des points *M* pour que *z'* soit imaginaire.

b) Montrer que si *M* varie sur la médiatrice de $[AB]$ alors *M'* varie sur un cercle que l'on précisera.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(2,0,1), B(0,2,1) et C(1,2,0).

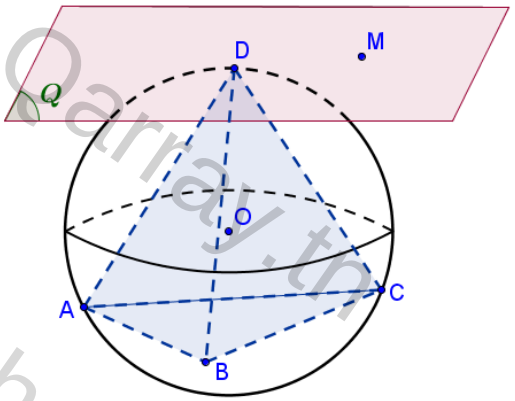
1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$.

2°) Soit la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

a) Vérifier que *A*, *B* et *C* sont des points de la sphère S.

b) Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.



3°) Soit le point *D* de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

On désigne par Q le plan passant par *D* et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point *D*.

4°) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Calculer $(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\cdot\vec{AM}$.

b) Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre *MABC* est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$

c) En déduire que pour tout point *M* du plan Q ; $\mathcal{V}=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

Qarray.tn - Aqua Blech - Qarray.tn